Application des Mathématiques : les Mathématiques Arabes en Exemple

Hédi Nabli*

Faculté des Sciences de Sfax, Département de Mathématique

Route de Soukra Km 3, BP 1171, Sfax 3000, Tunisia.

E-mail: Hedi.Nabli@fsm.rnu.tn, Tél. : 00216 22 606 586

Résumé

On s'intéresse dans ce travail aux applications des mathématiques en prenant comme source d'exemples les mathématiques arabes. L'objectif étant de donner une motivation à l'étudiant et une valorisation des concepts théoriques dans la discipline des mathématiques pour laquelle l'enseignement en Tunisie reste très abstrait. Dans ce cadre, j'ai proposé un module intitulé *Mathématiques Arabes et Applications* à la Faculté des Sciences de Sfax, qui est destiné aux étudiants inscrits en 2e année de Licence de Mathématiques Appliquées. Les branches abordées sont l'algèbre, la trigonométrie, la géométrie et l'analyse. Comme applications on cite entre autres : le partage d'un héritage, la construction de figures géométriques et la détermination du rayon de la terre. L'algèbre matricielle et la méthode des approximations successives en analyse numérique sont illustrées par des exemples du livre *Miftah Al-Hisab* d'Al-Kashi. En guise de conclusion, on rapportera la réaction et les opinions des étudiants et ce qu'ils ont éprouvé à l'égard de ce module.

Introduction

Ibn Khaldoun a écrit dans la section *L'enseignement est un art* de son livre *Al-Muqaddima* [10] "Pour être versé dans une science, pour en bien connaître tous les aspects et pour s'en rendre maître, il faut avoir pris l'habitude (*malaka*) de bien en comprendre tous les fondements, d'en avoir étudié les problèmes et d'avoir pu passer des principes aux applications. Faute de cet entraînement, on ne saurait prétendre à la maîtriser. Par habitude (*malaka*), il faut entendre ici autre chose que la compréhension et la mémoire. Comprendre un seul problème d'une seule science est aussi bien à la portée du spécialiste que du débutant, de l'ignorant que du savant. Tandis que

*L'auteur est professeur en mathématiques appliquées, il est aussi membre du Laboratoire de Probabilités et Statistique de la Faculté des Sciences de Sfax.

l'expérience (malaka) est le domaine exclusif du savant ou de celui qui a étudié les questions scientifiques : elle ne se confond donc pas avec l'entendement." Selon la pensée d'Ibn Khaldoun et dans le contexte de l'enseignement des mathématiques, il ne suffit pas par exemple de comprendre les opérations algébriques qui permettent de mettre sous forme canonique puis de résoudre une équation de premier ou de second degré. Il est impératif de connaître aussi l'utilité pratique de ce type de résolution et d'en comprendre le sens. Cette démarche ne peut être réalisée qu'à travers l'étude d'exemples significatifs liés à la vie réelle. Cela permet sans doute de mieux saisir le fond du fameux x algébrique, de s'initier à la mise en équation d'un problème réel et d'analyser puis interpréter la solution mathématique.

Il est à constater que l'enseignement des mathématiques est abstrait en Tunisie que ce soit au niveau secondaire ou encore au niveau supérieur. A rares exceptions près, la motivation majeure de l'élève pour cette discipline est la note en raison du barème relativement élevé des mathématiques dans les sections scientifiques. Passionné par la pensée khaldounienne, j'ai tenté de concevoir une option pour les étudiants inscrit en 2e année de licence de mathématiques, où l'on trouve divers applications dans différentes branches des mathématiques. Ce module optionnel est intitulé "Mathématiques Arabes et Applications", en abrégé L2MAA. L'objectif de cette démarche est triple, d'une part elle permet de motiver l'étudiant à s'intéresser aux mathématiques et d'autre part de l'initier à la modélisation mathématique. Enfin, l'histoire des mathématiques arabes est un élément qui est implicitement présent à travers ces applications.

Le choix des applications réelles tient comptent de l'ordre chronologique de leur auteur. Ils sont résolus par les outils mathématiques modernes avec un bref aperçu sur les outils de l'époque. On précise que l'objectif du module L2MAA est pédagogique et non épistémologique. Les exemples proposés sont, dans la mesure du possible, classés par branches et par thèmes.

Résolution des équations de premier et second degré

La principale contribution mathématique d'Al-Khawarizmi est l'arithmétique et l'algèbre. Son livre كتَاب الجمع والتفريق في الحسَاب الهندي [4], [15] a introduit le système décimal indien où tout nombre entier peut être représenté à l'aide de dix chiffres. Ce système par sa simplicité est devenu depuis longtemps universel. Contrairement au système de numérotation utilisant les lettres de l'alphabet, il permet d'avoir des règles pour les opérations arithmétiques, comme l'addition et la multiplication, sans recours à un nombre considérable de symboles (voir Fig. 1).

$$
\begin{array}{r}
1843 \\
+ \quad 1995 \\
\hline
3838
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\text{MDCCCXLIII} \\
+ \quad \text{MCMXCV} \\
\hline
?\,!\,!\,!
\end{array}
$$

FIG. 1 – Nombres MDCCCXLIII=1843 et MCMXCV=1995 en numérotation romaine

L'algèbre est une transcription du mot arabe الجبر, il a été utilisé par Al-Khawarizmi pour intituler son livre كتَاب الجبر وَالمقَابلة (le livre de restauration et de comparaison) [11]. Il s'agit de l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline à part entière [7]. Ce livre, écrit sous l'ordre du Calife المأمون, comporte :

- une partie théorique (résolution des équations de 1^{er} et 2^{e} degré)
- une partie sur les applications :
  - transactions commerciales بَاب المعَاملَات
  - arpentage بَاب المسَاحة
  - partage d'héritage avec testament بَاب الوصَايَا

On traitera presque tous les exemples de ce livre. Les étudiants me rapportent que c'est la première fois qu'ils ont à définir par eux même le x algébrique et à formuler l'équation à partir d'un texte. Suite à la résolution de l'équation établie, ils auront à analyser et interpréter sa solution mathématique. A ces exemples, on ajoute des exercices sur les équations de premier et de second degré extraits entre autres d'abu-Kamil [13], [5], d'Al-Kashi [9] ou d'Al-Amili [8] sans oublier bien sûr l'Urjuza d'Ibn Al-Yasamin [1], [2].

Calcul d'intégrales multiples

Le nombre π est ancré dans la culture populaire à un degré plus élevé que tout autre objet mathématique. Pourtant rares sont ceux qui connaissent sa définition géométrique. Il est utile de préciser que les arabes d'orient le notent par ط, qui est la lettre commune des deux mots arabes قطر (diamètre) et محِيط (périmètre). C'est seulement au cours du *XVIII*ième siècle que s'établit l'usage de la lettre grecque π, qui est aussi la première lettre des mots grecs $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$ (périphérie) et $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$ (périmètre) [19]. La démonstration de Banu-Musa sur le rapport constant de la circonférence d'un cercle avec son diamètre est basée sur un résultat d'Euclide, éléments *XII* [6].

Dans [11], Al-Khawarizmi a affirmé sans démonstration que le volume d'un cône ou d'une pyramide à base triangulaire ou rectangulaire est le tier de la surface de la base multiplié par la hauteur. Dans le module L2MAA, on démontre ces résultats moyennant les intégrales multiples.

On propose également les résultats sur le volume de la paraboloïde de première et de seconde espèce dûs à Ibn Al-Haytham et la quadrature de la parabole due à Archimède [6]. Ce type de calcul d'intégrale ne se fait pas en général sur un pavé, d'où sa difficulté. De plus, la fonction à intégrer n'est pas donnée, ni encore les axes et l'origine du repère. Cela permet de développer l'esprit d'initiative et de bon sens chez l'étudiant.

Coniques et équations de troisième degré

Le lien entre l'algèbre et la géométrie est étroit dans l'histoire des mathématiques arabes. Un problème purement géométrique peut être ramené à un problème algébrique, et pour résoudre ce dernier on fait appel à un autre outil géométrique. La résolution des équations algébriques de troisième degré par les coniques illustre parfaitement cette démarche. Les exemples d'applications n'en manquent pas, on cite à titre indicatif la construction d'un ennéagone régulier selon Al-Biruni [20], la trisection d'un angle selon Abu Sahl [5] et la division d'un quart de cercle selon Al-Khayyam [14]. Chaque exemple est donné sous forme d'un problème qui comporte à chaque fois une question sur la résolution par la méthode algébrique de Cardan. Lorsqu'il s'agit d'une construction géométrique, on inclut dans le problème une question qui est liée au théorème de Wantzel sur les nombres constructibles ou au théorème de Gauss sur les polygones réguliers constructibles. A juste titre, on donne ci-après un exemple de problème proposé.

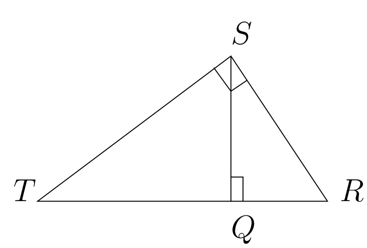
Problème (Extrait du "traité sur la division d'un quart de cercle" de **Omar Al-Khayyam**)

On veut construire un triangle RST rectangle en S (voir figure ci-dessous) vérifiant :

$$RS + SQ = RT \qquad (1)$$

$$RQ = 1 \qquad (2)$$

On pose $x = SQ$.



1) a - A partir du graphique, montrer que $RS^2 = 1 + x^2$ et que $RS^2 = RT \times RQ$.

b - En tenant compte des égalités (1) et (2), en déduire que x vérifie l'équation :

$$x^3 + 2x = 2x^2 + 2 \quad : \ (E)$$

2) Montrer que (E) admet une et une seule solution réelle que l'on note α.

3) Pour résoudre (E), Omar Al-khayyam considère les deux coniques suivantes :

$$\begin{cases} xy = \sqrt{2} & : (C_1) \\ (\sqrt{2} - y)^2 = (2 - x)(x - 1) & : (C_2) \end{cases}$$

a - Montrer que l'abscisse x de tout point $M\binom{x}{y} \in (C_1) \cap (C_2)$, différent de $A\binom{1}{\sqrt{2}}$, est solution de (E). *Indication :* $xy = \sqrt{2} \Longleftrightarrow \sqrt{2}(x-1) = x(\sqrt{2} - y)$.

b - Montrer que (C_1) est une hyperbole dont on déterminera le centre et les asymptotes.

c - Montrer que (C_2) est un cercle dont on déterminera le centre S et le rayon r.

d - Dessiner sur un repère orthonormé les deux coniques (C_1) et (C_2) et vérifier graphiquement que $1,55$ est une valeur approchée de α.

e - Résoudre l'équation (E) par la méthode de Cardan.

4) Construire alors le triangle RST tout en indiquant l'échelle utilisée et la longueur de chaque côté en fonction de α.

5) Montrer que ce triangle vérifie aussi $RS + RQ = ST$.

6) Quelle serait la longueur $x = SQ$ si on remplaçait la condition (2) par $RQ = a$ où a est un réel strictement positif.

Pour mener à bien ce chapitre, on donne un complément de cours sur la détermination du centre et de(s) axe(s) d'une conique à partir de son équation algébrique. Les techniques de construction d'un point d'une conique, dues à Ibn Sinan [5], sont également proposées.

Géométrie et trigonométrie

Dans sa *Muqaddima*, Ibn Khaldoun [10] a écrit : “Sachez que la géométrie ouvre l'esprit et lui donne (le goût) de la rigueur. Toutes les démonstrations y sont claires et bien ordonnées. L'erreur ne peut guère y avoir accès, en raison de cette clarté et de cet ordre. Aussi, celui qui a constamment recours à la géométrie a-t-il peu de chance de se tromper. De la sorte, la géométrie développe son intelligence. On prétend que Platon avait inscrit sur sa porte : “Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre". Nos maîtres comparaient l'effet de la géométrie sur l'intelligence à l'action du savon sur les vêtements : elle enlève les souillures et en nettoie les taches.”

En ce qui concerne la géométrie, la construction à la règle et au compas lui est accordée une attention particulière. On y acquiert de la technique et de l'efficacité. Dessiner par exemple une étoile peut se faire de plusieurs façons, mais la méthode basée sur l'hexagone est plus simple.

A ma connaissance, la construction de figures géométriques est un élément absent dans l'enseignement de la géométrie. Pourtant, ces figures ont été utilisées en abondance dans la décoration chez les arabes (voir Figure 2), le mot arabesque en est le parfait témoin. Cet aspect permet de développer le sens artistique et de donner une motivation à l'étude de la géométrie. Le théorème d'Al-Kashi et la loi des sinus, due à Al-Tusi puis Al-Kashi [5], sont naturellement prouvés et appliqués.

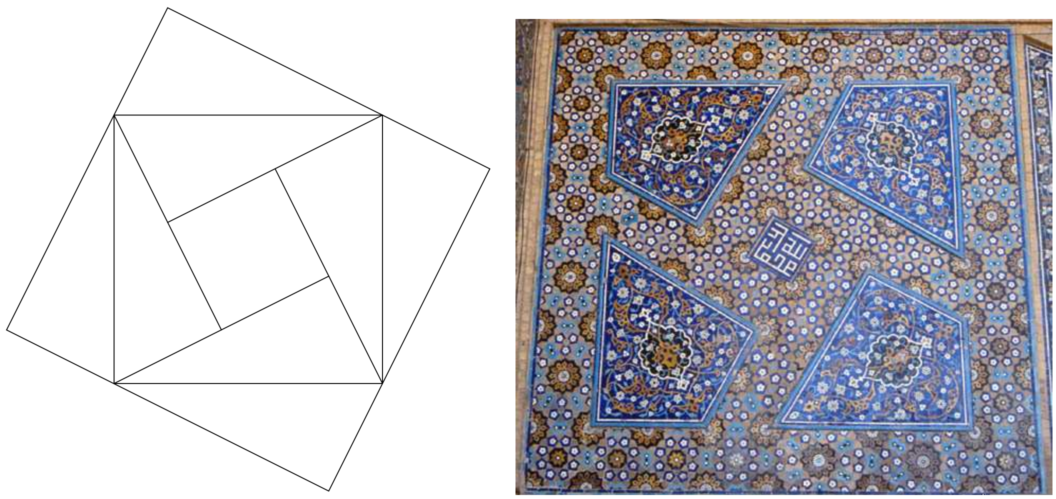


FIG. 2 – La figure à gauche comme motif de décoration, mosquée à Isfahan

En ce qui concerne la trigonométrie, les étudiants découvrent pour la première fois une démonstration des formules trigonométriques de base. Ces résultats, dûs à Abou Al-Wafa [5], sont exploités à leur tour pour la détermination de valeurs exactes de sinus et de cosinus de certains angles. A cet effet, la méthode d'Abu Al-Wafa [5],[18] pour la construction d'un pentagone régulier peut être formulée sous forme d'un problème. Des exemples de constructions géométriques de Naïm Ibn Musa [16] sont également proposés. Au niveau de l'ingénierie géométrique, on enseigne la méthode d'Al-Biruni pour la détermination de la hauteur d'une montagne et du rayon de la terre. Quelques applications de l'astrolabe se basant sur l'alidade (transcrit du mot arabe العضَادة) sont également étudiées. En géométrie sphérique, la méthode sur la détermination de la Qibla, basée sur le théorème d'Al-Battani et le théorème d'Abu Al-Wafa, est étudiée et analysée [5].

Arithmétique

Ibn-Khaldoun [10] dans une sous-section sur l'arithmétique de sa *Muqaddima* a écrit “C'est par l'art du calcul qu'il faut commencer l'école, car il donne des connaissances claires et des démonstrations systématiques. En général, il forme des têtes bien faites, habituées à raisonner juste. On prétend même qu'on doit faire confiance à celui qui a étudié le calcul dès son enfance, car il a acquis des bases solides, pour la contestation, qui lui deviennent comme une seconde nature ; de sorte qu'il s'habitue à l'exactitude et s'en tient à la méthode (que lui a apprise le calcul)."

Dans le module L2MAA, on s'intéresse particulièrement aux applications des mathématiques avec comme source d'exemples les mathématiques arabes. Pour l'arithmétique, on commence à justifier la *preuve* (مِيزَان الضّرب), qui est utilisée depuis l'école primaire pour vérifier le produit de deux entiers. Les énigmes mathématiques, appelés aussi problèmes de détermination de nombres pensés ou encore problèmes récréatifs [3], font parties de ce chapitre. L'exemple d'application du théorème d'Ibn Al-Haytham–Lagrange, dit de Wilson [17], est également étudié et résolu. On ajoute à cela les méthodes d'Ibn Al-Haytham [6] et d'Al-Amili [8] pour le calcul des puissances des n premiers entiers, le théorème d'Ibn Qurra sur les nombres amiables et un aperçu historique sur le théorème de Fermat.

Analyse numérique

Du livre مفتَاح الحسَاب (clef de l'arithmétique) d'Al-Kashi [9] et dans le cadre de l'analyse numérique, on s'intéresse aux points suivants :

- Règle d'Al-Kashi–Hörner : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_0 = \big((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2}) \cdots)x + a_0)\big)$
- Exemples réels se formulant en terme d'un système linéaire
- Calcul de π à 16 décimales exactes via la suite $(3 \times 2^n C_n)_{n \geq 0}$ avec $C_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - C_n^2}}$ et $C_0 = 1$
- Méthode d'extraction de la racine carrée
- Calcul de $\sin(1^\circ)$ par la méthode des approximation successives.

Pour le calcul de π, on précise l'intérêt d'avoir une bonne précision de sa valeur numérique comme l'a clairement formulé Al-Kashi[1] :

فَارق بين محيطي المضلع المحيط وَالمضلع المحَاط بدَائِرة قطرهَا يعَادل 600.000 مرة قطر الأَرض أَقل من سمك شعرة حصَان.

Ceci explique pourquoi Al-Kashi s'arrête à 16 décimales exactes bien qu'il pouvait aller au delà de cette précision grâce à sa suite récurrente. La méthode d'Al-Qalasadi pour affiner la valeur numérique d'une racine carrée [12] (تدقِيق التّقرِيب) permet d'apporter plus de précision à la méthode d'Al-Kashi. Bien sûr, on ne manque pas faire le lien avec la méthode de Newton

[1] Pour un cercle 600 000 fois plus grand que l'équateur terrestre, l'incertitude doit être inférieure à un crin de cheval.

qui juste itère la technique d'Al-Qalasadi. Enfin, le calcul numérique de $\sin(1°)$ est présenté sous forme de problème. A toutes ces activités, on donne en supplément la méthode d'analyse fréquentielle d'Al-Kindi utilisée pour décrypter des messages chiffrés par substitution [21].

Conclusion

L'expérience de l'enseignement du module L2MAA est âgée à ce jour de deux ans. Sur la question naturelle "quelle est votre opinion/critique sur ce module ?", les étudiants étaient unanimes, elle est très positive. En demandant plus de détails, les points dégagés par les étudiants se résument comme suit :

1. A travers ce module on comprend mieux pourquoi étudier les mathématiques.
2. Acquisition de compétences : partage d'héritage, répartition de gain entre associés, construction de figures géométriques, etc.
3. Notre vision du monde qui nous entoure a changé : on est plus sensible aux figures géométriques dans les objets de décoration. Auparavant ces formes passaient souvent inaperçues.
4. Connaître l'origine des mots et des symboles en mathématique est très enrichissant.
5. On y apprend beaucoup de connaissances : extraction de la racine carrée, la pertinence du calcul précis de π ou $\sin(1°)$, l'intérêt de tout calcul mathématique se mesure par son utilité, etc.
6. Ils déplorent que certains résultats mathématiques ne portent pas le nom de leur auteur, à l'image de la loi des sinus.

Il s'agit d'une expérience qui est encore vierge, et comme toute nouvelle expérience, elle est assujettie à des recommandations ou ajustements surtout que la démarche entreprise est purement personnelle. D'ailleurs, les étudiants ont exprimé leur souhait que le module L2MAA soit généralisé dans toutes les sections de mathématique ou d'ingénierie.

Références

[1] Abdeljaouad Mahdi, $12th$ Century Algebra in an Arabic Poem : Ibn Al-Yasamin's Urjuza fi'l-jabr wa'l-muqabal, Tunis 2005.

[2] Abdeljaouad Mahdi, The Eight Hundredth Anniversary of the Death of Ibn al-Yasamin : Bilatery as part of this thinking and practice, *Huitième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes,* Tunis 2004.

[3] Abdeljaouad Mahdi, *Les arithmétiques arabes* ($9^e - 15^e$ *siècle),* Editions Ibn Zeidoun, 2005.

[4] Allard André, *Muhammad Ibn Musa al-Khawarizmi, le calcul indien (Algorismus)*, Albert Blanchard, Société des études classiques, Paris, Bruxelles, 1992, Histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du $XII^{\text{ième}}$ siècle.

[5] Berggren J. L., *Episodes in the mathematics of medieval islam*, Springer-Verlag, New York 1986.

[6] Crozet Pascal, Les archimédiens arabes, *Histoire des mathématiques, deuxième semestre thématique*, Tunis, 4 Octobre - 17 Décembre, 2004.

[7] Djebbar Ahmed, *Une histoire de la science arabe, Entretiens avec Jean Rosmorduc*, Edition du seuil, mai 2001.

[8] جلَال شوقِي, ريَاضيَّات بهَاءِ الدِّين العَاملِي, معهد التّرَاث العربِي, جَامعة حلب 1976.

[9] جمشِيد الكَاشِي, مفتَاح الحسَاب, تحقِيق نَادر النَّابلسِي, جَامعة دمشق 1977.

[10] Ibn Khaldoun (trad. Vincent Monteil), *Discours sur l'histoire universelle. Al-Muqaddima*, Commission libanaise pour la traduction des chefs-d'œuvre, Beyrouth, 1967-1968.

[11] محمّد بن موسَى الخوَارزمي, كتَاب الجبر وَالمقَابلة, تحقيق محمّد مرسي احمد و علِي مصطفَى مشرفة, 1968.

[12] علِي بن محمّد القلصَادِي, كشف الأسرَار عن علم الحسَاب, المكتبة الوطنة بتونس.

[13] Rashed Roshdi, Histoire de l'analyse diophantienne et de la théorie des nombres de Diophante à Fermat, *Histoire des mathématiques, deuxième semestre thématique*, Tunis, 4 Octobre - 17 Décembre, 2004.

[14] Rashed R. et Vahabzadeh B., *Al-Khayyam Mathématicien*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris 1999.

[15] Rashed Roshdi, *M. Ibn M. al-Khwarizmi – Le commencement de l'algèbre*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris 2007.

[16] Rashed R. et Houzel C., *Recherche et enseignement des mathématiques au IX siècle – Le recueil de propositions géométriques de Naïm ibn Musa*, Editions Peeters, Louvain-Paris 2004.

[17] Rashed Roshdi, Ibn al-Haytham et le théorème de Wilson, *Archive of History of Exact Sciences*, **22** No. 4, 1980.

[18] أَبو الوفَاء البوزجَانِي, كتَاب فيمَا يحتَاج إِليه الصَانع من أَعمَال الهندسة, Ayasofya No. 2753.

[19] http ://fr.wikipedia.org/wiki/Pi

[20] http ://serge.mehl.free.fr/anx/enneagone.html

[21] http ://fr.wikipedia.org/wiki/Analyse_fréquentielle